x の２乗に比例する関数

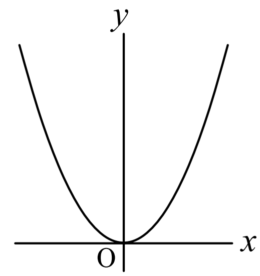
関数 $y=ax^2$ のグラフ

① $y=ax^2$ のグラフは、放物線といわれるなめらかな曲線である。

② 放物線は対称の軸をもち、その軸と放物線の交点を頂点という。

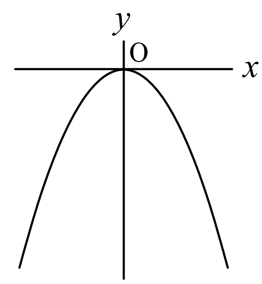
③ $a>0$ のとき

ア　グラフは上に開く。
イ　x の値が増加するとき、y の値は $x=0$ を境として、
　減少から増加に変わる。
ウ　x のどんな値に対しても $y \geqq 0$ である。
エ　$x=0$ のとき、y は最小値 0 をとる。



④ $a<0$ のとき

ア　グラフは下に開く。
イ　x の値が増加するとき、y の値は $x=0$ を境として、
　増加から減少に変わる。
ウ　x のどんな値に対しても $y \leqq 0$ である。
エ　$x=0$ のとき、y は最大値 0 をとる。



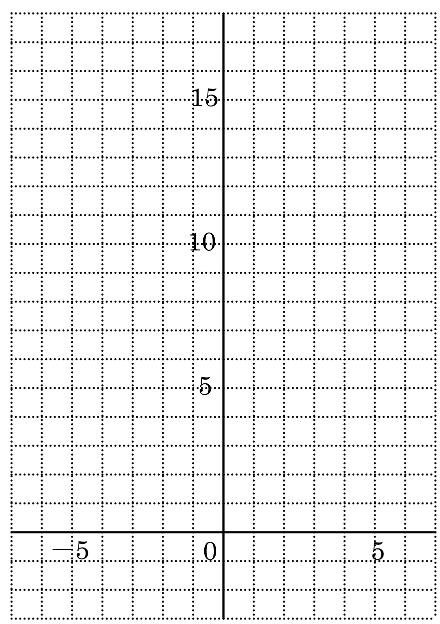
⑤ a の絶対値が大きいほど、グラフの開き方は小さくなる。また a の絶対値が等しく、符号が異なる2つのグラフは x 軸について対称になる。

【1】 y が x の２乗に比例し、$y=\frac{1}{2}x^2$ と表されるとき、次の各問いに答えなさい。

① 下の x と y の表を完成しなさい。

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
y							

② x と y の関係をグラフに表しなさい。



x の２乗に比例する関数

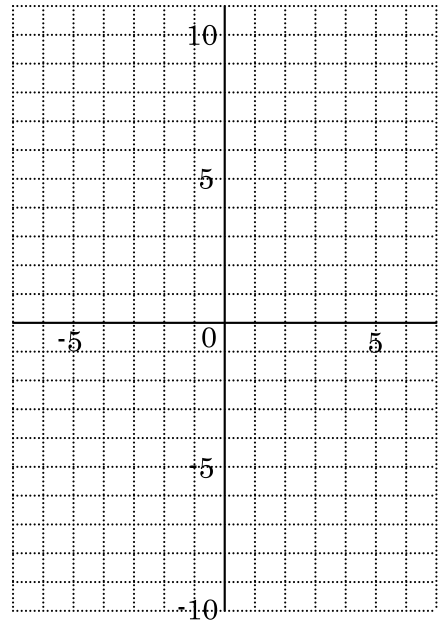
【2】次の y が x の 2 乗に比例する関数をグラフに表しなさい。

① $y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

② $y = -\dfrac{1}{4}x^2$

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
y							



【3】次のア～オの関数のうち、下の①～④にあてはまるものを選び、記号で答えなさい。

ア $y = 2x^2$　　イ $y = -\dfrac{1}{2}x^2$　　ウ $y = 3x^2$　　エ $y = -2x^2$　　オ $y = -x^2$

① グラフが下に開くものをすべて答えなさい。

② グラフの開き方がもっとも小さいものはどれか。

③ $x < 0$ の範囲で、x の値が増加すると y の値も増加するものをすべて答えなさい。

④ グラフが x 軸について対称になるものはどれとどれですか。

x の２乗に比例する関数

y の変域

x のとりうる値に対する y のとりうる値の範囲を y の変域という。

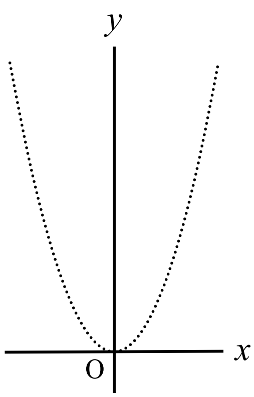
(1)　x の変域が $x>0$ または $x<0$ のとき、x の値をそれぞれ代入する。

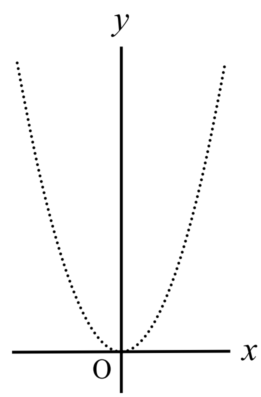
(2)　x の変域が負の数から正の数までのときグラフは原点を通るため
$a>0$ のとき最小値 $x=0$ を、$a<0$ のとき最大値 $x=0$ をとる。また、x の変域のうち、絶対値が大きい方だけを代入する。

【例題】 $y=2x^2$ において、x の変域が、次の①・②のときの y の変域を求めなさい。

①　x の変域が $-5 \leqq x \leqq -3$

②　x の変域が $-2 \leqq x \leqq 4$

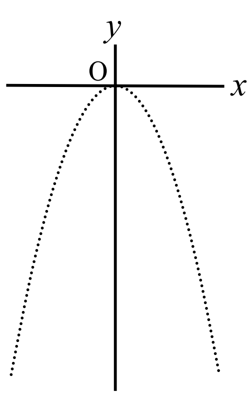


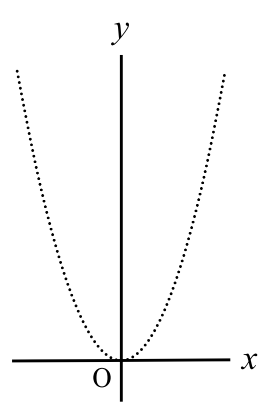


【1】次の①～④の関数についてグラフの略図をかき、y の変域をそれぞれ求めなさい。

①　関数 $y=-x^2$ において、x の変域が $3 \leqq x \leqq 5$ であるとき、y の変域。

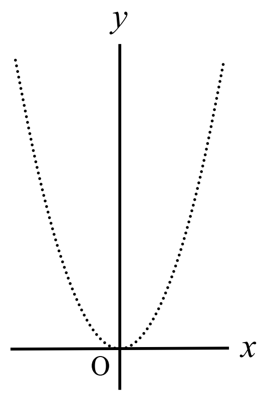
②　関数 $y=2x^2$ において、x の変域が $-6 \leqq x \leqq 4$ であるとき、y の変域。



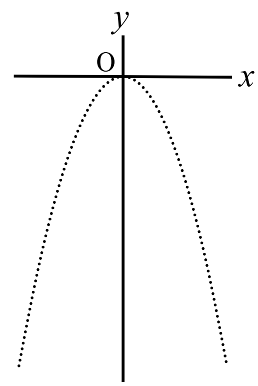


x の２乗に比例する関数

③ 関数　$y=2x^2$　において、x の変域が、$1 \leqq x \leqq 6$ であるとき、y の変域。



④ 関数　$y=-x^2$　において、x の変域が、$-3 \leqq x \leqq 5$ であるとき、y の変域。



【2】次の①～⑤の関数について y の変域をそれぞれ求めなさい。

① 関数　$y=3x^2$　において、x の変域が、$2 \leqq x \leqq 4$ であるとき、y の変域。

② 関数　$y=x^2$　において、x の変域が、$-4 \leqq x \leqq 3$ であるとき、y の変域。

③ 関数　$y=-2x^2$　において、x の変域が、$-3 \leqq x \leqq -1$ であるとき、y の変域。

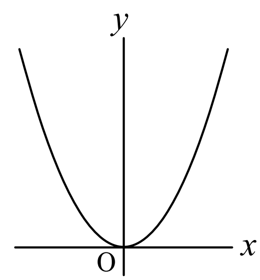
④ 関数　$y=\dfrac{1}{2}x^2$　において、x の変域が、$-4 \leqq x \leqq 6$ であるとき、y の変域。

⑤ 関数　$y=-\dfrac{2}{3}x^2$　において、x の変域が $-6 \leqq x \leqq 3$ であるとき、y の変域。

x の２乗に比例する関数

y の変域〔発展〕

【例題】関数 $y = ax^2$ において、x の変域が、$-4 \leqq x \leqq 3$ のとき、y の変域が $b \leqq y \leqq 8$ である。このとき、a，b の値を求めなさい。



【3】次のそれぞれの場合において a，b の値を求めなさい。

① 関数 $y = 2x^2$ において、x の変域が、$2 \leqq x \leqq a$ のとき、y の変域が $b \leqq y \leqq 32$ である。このとき、a，b の値を求めなさい。

② 関数 $y = -x^2$ において、x の変域が、$a \leqq x \leqq 2$ のとき、y の変域が $-16 \leqq y \leqq b$ である。このとき、a，b の値を求めなさい。

③ 関数 $y = ax^2$ において、x の変域が、$-1 \leqq x \leqq 3$ のとき、y の変域が $b \leqq y \leqq 18$ である。このとき、a，b の値を求めなさい。

④ 関数 $y = ax^2$ において、x の変域が、$-6 \leqq x \leqq 3$ のとき、y の変域が $-12 \leqq y \leqq b$ である。このとき、a，b の値を求めなさい。

x の２乗に比例する関数

変化の割合〔１〕

① 一般に x の関数 y について $\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ を変化の割合という。これは x が 1 増加したときの y の増加量である。

② 一次関数 $y = ax + b$ では、変化の割合は一定で、x の係数 a に等しい。

【例題】 関数 $y = 2x^2$ において、x の値が、-2 から 5 まで増加するとき変化の割合を求めなさい。

〔解〕 x の値に対する y の値を求めると、下のようになる。従って変化の割合は

x	-2	5
y	8	50

$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \dfrac{50-8}{5-(-2)} = \dfrac{42}{7} = 6$ である。

【1】次の変化の割合を求めなさい。

① 1次関数 $y = 2x + 5$ において、x の値が、-2 から 2 まで増加するとき。

x		
y		

② 関数 $y = 3x^2$ において、x の値が、-2 から 1 まで増加するとき。

x		
y		

③ 関数 $y = -x^2$ において、x の値が、-3 から -1 まで増加するとき。

x		
y		

④ 関数 $y = -\dfrac{1}{3}x^2$ において、x の値が、5 から 10 まで増加するとき。

x		
y		

x の２乗に比例する関数

変化の割合〔２〕

関数 $y=ax^2$ では、x が p から q まで増加するとき、$\boxed{\text{変化の割合}=a(p+q)}$ として求められる。これは関数 $y=ax^2$ のグラフ上の x 座標が p 、q である2点を通る直線の傾きに等しい。

【例題】関数　$y=ax^2$　において、x が p から q まで増加するとき、次のようにして、変化の割合を求めなさい。

x	p	q
y		

変化の割合＝ $\dfrac{\qquad}{\qquad}$　　分子を因数分解して、約分して簡単にすると

$$=\frac{\qquad}{\qquad}=\frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}=a(p+q)$$

【２】　次の関数について<u>２通りの方法で</u>、変化の割合を求めなさい。

① 関数　$y=2x^2$　において、x の値が、-2 から 5 まで増加するとき。

x		
y		

② 関数　$y=x^2$　において、x の値が、-3 から -1 まで増加するとき。

x		
y		

③ 関数　$y=\dfrac{2}{3}x^2$　において、x の値が、-2 から 4 まで増加するとき。

x		
y		

x の２乗に比例する関数

変化の割合〔発展〕

【例題】関数　$y=x^2$　において、x の値が、a から $a+1$ まで増加するとき、変化の割合が -5 であった。このとき、a の値を求めなさい。

【3】次の問に答えなさい。

① 関数　$y=ax^2$　において、x の値が、1 から 3 まで増加するとき、変化の割合が 6 であった。このとき、a の値を求めなさい。

② 関数　$y=2x^2$　において、x の値が、a から $a+1$ まで増加するとき、変化の割合が 10 であった。このとき、a の値を求めなさい。

③ 関数　$y=\dfrac{1}{2}x^2$　において、x の値が、a から $a+2$ まで増加するとき、変化の割合が 4 であった。このとき、a の値を求めなさい。

④ x の値が、a から $a+3$ まで増加するとき、$y=\dfrac{1}{3}x^2$ と $y=5x-2$ の変化の割合が等しくなった。このとき a の値を求めなさい。

【4】高い所から物を自然に落とすとき、落ち始めてから x 秒後までに落ちる距離を y とするとき、$y=5x^2$ という関係がある。

① 落ちはじめてから 4 秒後までの平均の速さを求めなさい。

② 落ちはじめて 2 秒後から 5 秒後までの平均の速さを求めなさい。