

二次方程式の利用

解と係数〔1〕

【例題】二次方程式 $x^2 + ax - 15 = 0$ の解の1つが3であるとき、 a の値と他の解を求めなさい。

(解法) $x^2 + ax - 15 = 0$ に $x = 3$ を代入し、 a を求めます。

$$3^2 + 3a - 15 = 0 \quad \text{より} \quad 3a = 6, \quad a = 2 \quad \text{が得られます。}$$

つまり、二次方程式は $x^2 + 2x - 15 = 0$ ですから、 $(x - 3)(x + 5) = 0$

$$x = 3, -5$$

$$\text{答} \quad \underline{a = 2}, \quad \underline{x = -5}$$

【1】二次方程式 $x^2 - ax - 12 = 0$ の解の1つが3であるとき a の値と他の解を求めなさい。

【2】二次方程式 $x^2 - ax + 2a - 4 = 0$ の解の1つが -8 であるとき、 a の値と、他の解を求めなさい。

【3】二次方程式 $x^2 - 2x + a = 0$ の解の1つが $1 - \sqrt{2}$ であるとき、 a の値と他の解を求めなさい。

【4】二次方程式 $x^2 - ax + a^2 - 7 = 0$ の解の1つが 2 であるとき、 a の値をすべて求めなさい。

【5】二次方程式 $x^2 - (p + 1)x - p^2 - 3 = 0$ の解の1つが 6 であるとき、 p の値をすべて求めなさい。

二次方程式の利用

解と係数 [2]

【例題】 $x^2 + ax + b = 0$ の解が -3 と 7 であるとき a, b の値を求めなさい。

(解) 解が a, b であれば、2 次方程式は $(x-a)(x-b) = 0$ と因数分解されるはずだから、この問題では $(x+3)(x-7) = 0$ が成り立つ
左辺を展開すると $x^2 - 4x - 21 = 0$ となり、係数を比較して
$$\underline{a = -4, b = -21}$$

(別解) $x^2 + ax + b = 0$ に
 $x = -3$ を代入して $9 - 3a + b = 0$ つまり $3a - b = 9 \cdots \textcircled{1}$
 $x = 7$ を代入して $49 + 7a + b = 0$ つまり $7a + b = -49 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ の連立方程式を解くと、
$$\underline{a = -4, b = -21}$$

【5】 2次方程式 $x^2 + mx + n = 0$ の解が 4 と -1 であるとき m, n の値を求めなさい。

【6】 2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解が 4 と -6 であるとき a, b の値を求めなさい。

【7】 次の問いに答えなさい。

① 2次方程式 $x^2 - 8x + a = 0$ の解の1つが $4 - \sqrt{7}$ であるとき、 a の値と他の解を求めなさい。

② 2次方程式 $x^2 - ax - 3a = 0$ を解くのに、誤って $x^2 + ax - 3a = 0$ として解いたので、解の1つが、 -6 になった。 a の値と正しい解を求めなさい。

② 2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ を解くのに、誤って $x^2 - bx + a = 0$ を解いたので、解は 2 と 3 になった。と正しい解を求めなさい。

二次方程式の利用

整数に関する問題

【例題】連続する3つの自然数がある。そのうち、最小の数と最大の数の積は、3つの数の和の2倍より1小さい。この3数を求めなさい。

(解法) 中央の数を x とすると、3つの自然数は $x-1$, x , $x+1$ と表される。

$$\text{題意より } (x-1)(x+1) = 2\{(x-1) + x + (x+1)\} - 1$$

$$x^2 - 6x = 0, x(x-6) = 0$$

$$x = 0, 6 \quad \text{ここで } x \text{ は、自然数だから}$$

答 5, 6, 7

【1】大小2つの自然数があつて、その差は5で、積が84である。この2数を求めなさい。

【2】ある正の数の平方は、もとの数の2倍より8だけ大きい。もとの整数を求めなさい。

【3】ある正の数に3を加えてから2乗するところを、3を加えてから誤って2倍したため、正しい答えより63だけ小さくなりました。はじめの正の数を求めなさい。

【4】連続する3つの自然数がある。最大の数の平方は他の2つの数の和の7倍より3小さい。この3つの自然数を求めなさい。

二次方程式の利用

図形に関する問題

【例題】正方形と長方形がある。長方形の縦は正方形の1辺より 3cm 長く、長方形の横は長方形の縦より 2cm 長い。また、正方形と長方形の面積の和は 105cm^2 である。このとき、正方形の1辺の長さを求めなさい。

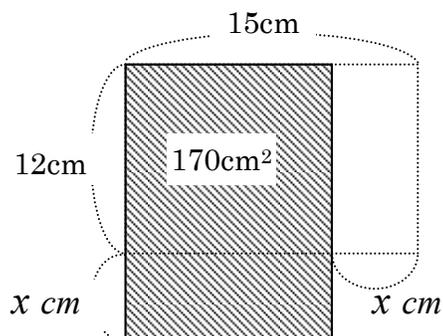
(解法) 正方形の1辺を x とすると、長方形の縦、横はそれぞれ $x+3$ 、 $x+5$ と表されるので、題意より $(x+3)(x+5)+x^2=105$ である。

$$2x^2 + 8x - 90 = 0 \text{ より } x^2 + 4x - 45 = 0, (x+9)(x-5) = 0$$

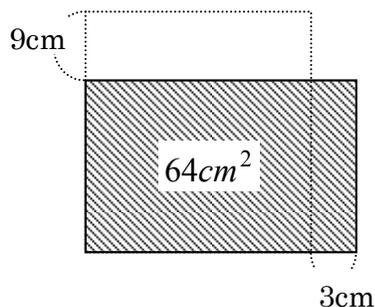
$$x = 5, -9 \quad \text{ここで1辺の長さ } x \text{ は正の数だから} \quad \text{答 } \underline{5\text{cm}}$$

【1】縦が横より 4cm 長い長方形がある。この長方形の面積が 192cm^2 であるとき、この長方形の縦、横の長さをそれぞれ求めなさい。

【2】縦が 12cm で、横が 15cm の長方形がある。この縦を $x\text{cm}$ 長くし、横を $x\text{cm}$ 短くすると面積が 170cm^2 になった。このときの x を求めなさい。

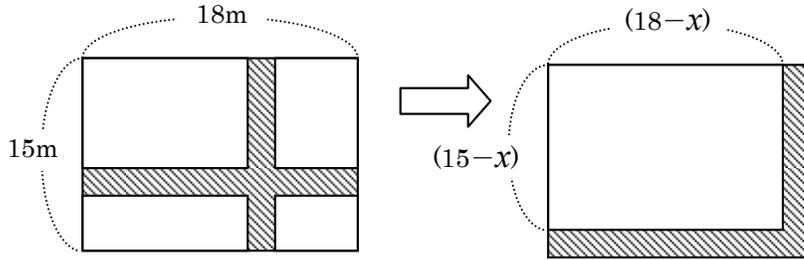


【3】ある正方形の1辺の長さを 9cm 短くし、他の1辺の長さを 3cm 長くして長方形を作ったら、面積が 64cm^2 になった。もとの正方形の1辺の長さを求めなさい。

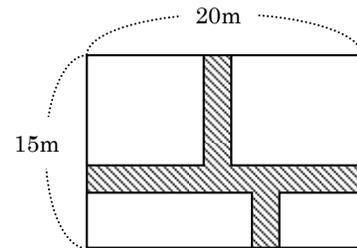


二次方程式の利用

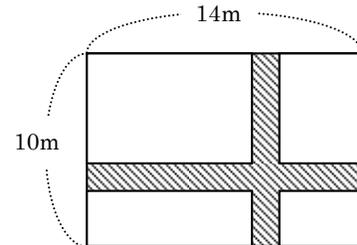
【例題】 縦 $15m$ 、横 $18m$ の長方形の花だんに、下の図のように、同じ幅の道路をつけて、道路を除いた花だんだけの面積が $180m^2$ になるようにしたい。道路の幅を何 m にすればよいか。



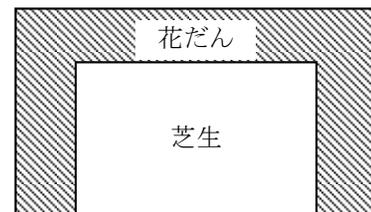
【4】 縦 $15m$ 、横 $20m$ の長方形の土地に、右の図のように、同じ幅の道路をつけて、残りを花壇にしたい。花壇の面積を $204m^2$ にするには、道路の幅を何 m にすればよいか。



【5】 縦 $10m$ 、横 $14m$ の長方形の土地に、右の図のように、同じ幅の道路をつけて、道路の面積が $44m^2$ になるようにしたい。道路の幅を何 m にすればよいか。

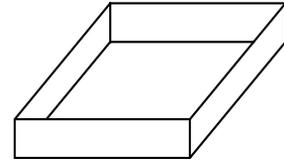
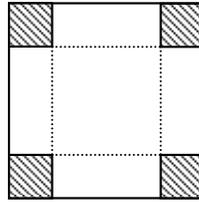


【6】 縦 $20m$ 、横 $30m$ の長方形の土地に同じ幅の花だんを作り、残りを芝生にした。すると芝生の面積は $408m^2$ になった。花だんの幅を求めなさい。

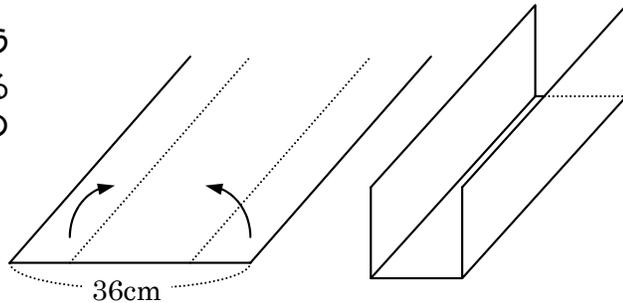


二次方程式の利用

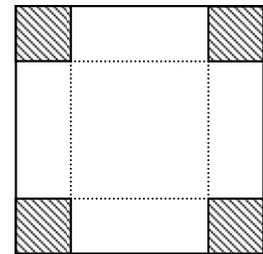
【例題】ある正方形の紙の4すみから1辺5cmの正方形を切り取り、ふたのない箱を作ると、箱の容積が 720cm^3 になった。もとの正方形の1辺の長さを求めなさい。



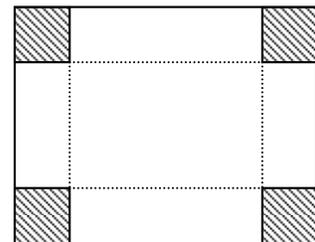
【7】幅 36cm のトタン板を右の図のように折り曲げて、断面が 160cm^2 である雨どいを作りたい。はしから何 cm のところを折り曲げるとよいか。



【8】ある正方形の紙の4すみから1辺5cmの正方形を切り取り、ふたのない箱を作ると、箱の容積が 1280cm^3 になった。もとの正方形の1辺の長さを求めなさい。



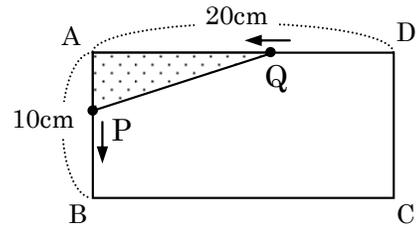
【9】横が縦より 3cm 長い長方形の紙の4すみから1辺 4cm の正方形を切り取り、ふたのない箱を作ると、箱の容積が 216cm^3 になった。もとの長方形の縦と横の長さをそれぞれ求めなさい。



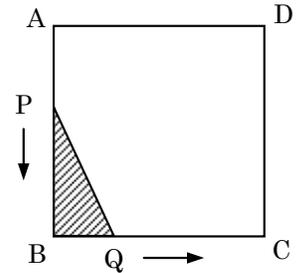
二次方程式の利用

動点に関する問題

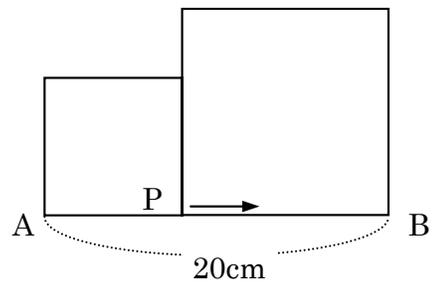
【例題】右の図は $AB = 10\text{cm}$ 、 $AD = 20\text{cm}$ の長方形 $ABCD$ である。点 P は頂点 A を、点 Q は頂点 D を同時に出発し、点 P は毎秒 1cm で、頂点 B へ、点 Q は毎秒 2cm でそれぞれ進むとき、点 P が頂点 B に、点 Q が頂点 A に重なるまで動いた。出発してから x 秒後の三角形 APQ の面積が 24cm^2 になるのは出発してから何秒後ですか。



【1】1 辺の長さが 15cm の正方形 $ABCD$ がある。点 P は A を出発して、毎秒 1cm の速さで B まで動く。また、点 Q は点 P と同時に B を出発して、 P と同じ速さで C まで動く。 $\triangle PBQ$ の面積が 28cm^2 になるのは、点 P 、 Q が出発してから何秒後ですか。

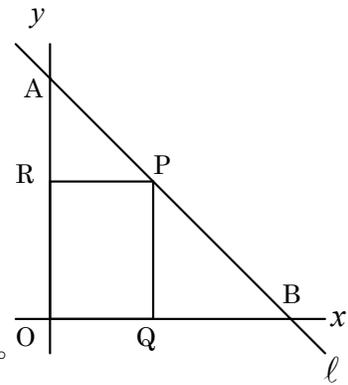


【2】長さ 20cm の線分 AB 上を P 点が秒速 1cm で A から B まで動いていきます。このとき AP および PB を1辺とする正方形の面積の和が 232cm^2 になるのは、点 P が動きはじめて何秒後と何秒後ですか。



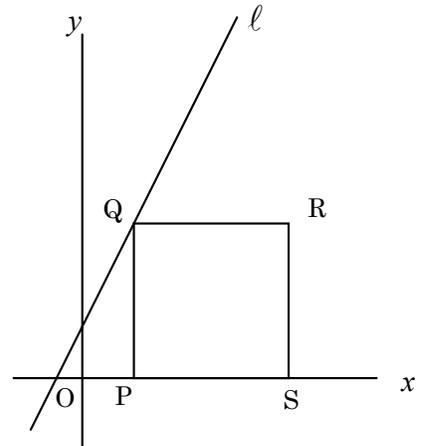
二次方程式の利用

【3】右の図で l は $y = -x + 8$ のグラフである。また P は l 上の点で、 A から B まで動いていくものとする。点 P から x 軸、 y 軸に垂線を下し、長方形 $PROQ$ を図のようにつくった。



- ① Q の x 座標を a とすると、点 P の座標を a を用いて表しなさい。
- ② 長方形 $PROQ$ が 15cm^2 となると、 P の座標を求めなさい。

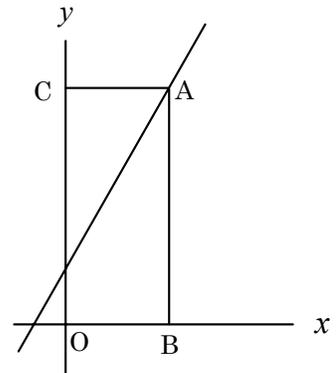
【4】右の図で l は $y = 2x + 1$ のグラフである。点 P は x 軸上を動き、 P から y 軸に平行に引いた直線が l と交わる点を Q とし、 PQ を1辺とする正方形 $PQRS$ を図のようにつくった。点 P の x 座標を正とすると、次の問に答えなさい。



- ① 点 P の x 座標を a とすると、 PS の長さを、 a を用いて表しなさい。
- ② 正方形 $PQRS$ の面積が 225cm^2 のとき、 P の座標を求めなさい。

【5】右の図のように $y = 2x + 1$ 上の点 A から、 x 軸、 y 軸に垂線 AB, AC を引く。

- ① 点 A の x 座標を a とすると、 AB の長さを、 a を用いて表しなさい。
- ② 長方形 $ACOB$ の面積が 36cm^2 のとき、点 A の座標をすべて求めなさい。



二次方程式の利用

自由落下や投げ上げの問題

【例題】ある物体を秒速 60 m で、地上から真上に打ち上げるとき、打ち上げてから t 秒後の物体の高さ h は、 $h = 60t - 5t^2$ で表されるという。このとき、次の問に答えなさい。但し、空気の抵抗は考えないものとします。

- ① 物体が再び地上に落下してくるのは何秒後ですか。
- ② 物体の高さが 160m になるのは何秒後と何秒後ですか。

【1】ある物体を秒速 50 m で、地上から真上に打ち上げるとき、打ち上げてから t 秒後の物体の高さ h は、 $h = 50t - 5t^2$ で表されるという。このとき、次の問に答えなさい。

- ① 物体の高さが 80m になるのは打ち上げられてから何秒後と何秒後ですか。
- ② 物体の高さが 105m になるのは打ち上げられてから何秒後と何秒後ですか。

【2】ある物体を秒速 40 m で、地上から真上に打ち上げるとき、打ち上げてから t 秒後の物体の高さ h は、 $h = 40t - 5t^2$ で表されるという。このとき、次の問に答えなさい。

- ① 物体が再び地上に落下してくるのは何秒後ですか。
- ② 物体の高さが 60m になるのは打ち上げられてから何秒後と何秒後ですか。
- ③ この物体が最も高い地点に達するのは、①で求めた時間のちょうど $\frac{1}{2}$ の瞬間だとすると、このときの高さを求めなさい。

二次方程式の利用

規則性に関する問題

【例題】多角形に引くことができる対角線について次の問に答えなさい。

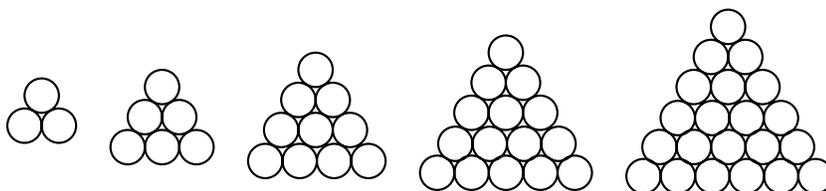
- ① 正方形の数とマッチ棒の数の関係を下の表にまとめなさい。

多角形						
対角線の数						

- ② 正方形の数を x 個、マッチ棒の数を y として、 y を x の式で表しなさい。

- ③ 正方形の数を 8 個作るには、マッチ棒は何本必要ですか。

【2】 基石を用いて下の図のように三角形を作ったとき、三角形の 1 辺に並ぶ基石の数と、三角形全体の基石の総数について、次の問に答えなさい。



- ① 1 辺に並ぶ基石の数と三角形全体の基石の総数の関係を下の表にまとめなさい。

1 辺の基石の数	2	3	4	5	6
基石の総数					

- ② 1 辺に並ぶ基石の数を x 個とするとき、基石の総数を x の式で表しなさい。

- ③ 基石が全部で 78 個並んでいるとき、三角形の 1 辺に並ぶ基石は何個ですか。

二次方程式の利用

割合に関する問題〔発展〕

【例題】原価が 600 円の品物に $2x$ 割の利益を見込んで定価をつけたが、実際は定価の x 割引きで売ったため 72 円の利益であった。 x の値を求めなさい。

定価 = 原価 \times (1+割増率) , 売価 = 定価 \times (1-割引率) なので

$$600 \times \left(1 + \frac{2x}{10}\right) \times \left(1 - \frac{x}{10}\right) = 672 \quad \text{より} \quad (x-2)(x-3) = 0 \quad \therefore \underline{x=2, 3}$$

【1】定価が 800 円の品物がありましたが、毎年 x % ずつ値上がりするため、2 年後には 2 年前と比べて 168 円の値上がりになっていました。 x の値を求めなさい。

【2】原価が 1000 円の品物に x 割の利益を見込んで定価をつけたが、売れないので、定価の x 割引きで売ったため 40 円の損をしたという。 x の値を求めなさい。

【3】原価が 1000 円の品物に x 割の利益を見込んで定価をつけたが、売れないので、定価の x 割引きで売ったため 40 円の損をしたという。 x の値を求めなさい。

【4】ある商品は、定価を $2x$ % 値上げすると、売り上げ個数は x % 減少するという。この商品の売り上げを 12% 増加させるためには、初めに何% の値上げを行えばよいか。

二次方程式の利用

食塩水に関する問題〔発展〕

【例題】濃度 16%の食塩水 200g を入れた容器から、 x gの食塩水をくみ出し、かわりに x gの水を入れた。よくかき混ぜた後、再び x gの食塩水をくみ出し、かわりに x gの水を入れたら、濃度が 9%になった。 x の値を求めなさい。

初めの食塩の量は $200 \times \frac{16}{100} = 32$ g、最後に残った食塩の量は $200 \times \frac{9}{100} = 18$ g

1 回目に x gの食塩水をくみ出したとき、残っている食塩の量は $32 \times \frac{200-x}{200}$ g、

2 回目に残っている食塩の量は $32 \times \frac{200-x}{200} \times \frac{200-x}{200}$ g と表される。

従って、方程式は $32 \times \frac{200-x}{200} \times \frac{200-x}{200} = 18$ である。…(以下略)

【1】濃度 10%の食塩水 500g を入れた容器から、 x gの食塩水をくみ出し、かわりに x gの水を入れた。よくかき混ぜた後、さらに x gの食塩水をくみ出し、かわりに x gの水を入れたら、濃度が 6.4%になった。

- ① 初めの食塩と最後の食塩の量をそれぞれ求めなさい。
- ② x gの食塩水をくみ出したとき、あとに残っている食塩の量を x の式で表しなさい。
- ③ 2次方程式をつくり、 x の値を求めなさい。

【2】濃度 18%の食塩水 300g を入れた容器から、 x gの食塩水をくみ出し、かわりに x gの水を入れた。よくかき混ぜた後、さらに x gの食塩水をくみ出し、かわりに x gの水を入れたら、濃度が 8%になった。 x の値を求めなさい。