平方根の応用

平方根の性質〔1〕

〔例題〕 $\sqrt{90a}$ が自然数となるような、最小の自然数 a の値を求めなさい。

（解法）根号の中を平方数にするには素因数分解したとき指数を偶数にすればよい。
$\sqrt{90a}=\sqrt{2\times3^2\times5\times a}$ だから $a=2\times5\times n^2$（n は自然数）
であればよい。従って、最小のときは $a=2\times5\times1^2=10$ である。

【1】次の問いに答えなさい。

① $\sqrt{12a}$ が自然数となるような、最小の自然数 a の値を求めなさい。

② $\sqrt{150a}$ が自然数となるような、最小の自然数 a の値を求めなさい。

③ $\sqrt{28a}=b$ を満たす最小の自然数 a 、b の値を求めなさい。

④ $\sqrt{\dfrac{40n}{3}}$ が自然数となるような、最小の自然数 a の値を求めなさい。

⑤ $\sqrt{\dfrac{32}{a}}$ が自然数となるような、自然数 a の値をすべて求めなさい。

⑥ $\sqrt{\dfrac{216}{a}}$ が自然数となるような、自然数 a の値をすべて求めなさい。

平方根の応用

平方根の性質〔2〕

〔例題〕 $\sqrt{19-3a}$ が自然数となるような、自然数 a の値をすべて求めなさい。

（解法） $19-3a$ が、1^2 、2^2 、3^2 、4^2 になればよいので

$19-3a=1^2$ のとき、$a=6$　　$19-3a=2^2$ のとき、$a=5$

$19-3a=3^2$ のとき、a は自然数とはならない

$19-3a=4^2$ のとき、$a=1$　　従って $a=1,5,6$ である。

【2】次の問いに答えなさい。

① $\sqrt{10-a}$ が整数となるような、自然数 a の値をすべて求めなさい。

② $\sqrt{20-2a}$ が自然数となるような、自然数 a の値をすべて求めなさい。

③ $\sqrt{100-12a}$ が自然数となるような、自然数 a の値をすべて求めなさい。

④ $\sqrt{12(15-a)}$ が整数となるような、自然数 a の値をすべて求めなさい。

平方根の応用

平方根の整数部分と小数部分

〔例題〕 $\sqrt{5}$ の整数部分を a 、小数部分を b とするとき、a^2-b^2 の値を求めなさい。

（解法） $\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{9}$ だから $2<\sqrt{5}<3$ 、従って $a=2$ 、$b=\sqrt{5}-2$
と表すことができる。従って
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=\sqrt{5}\times(4-\sqrt{5})=-5+4\sqrt{5}$

【3】次の問いに答えなさい。

① $\sqrt{5}<n<\sqrt{50}$ を成り立たせる整数 n の値をすべて求めなさい。

② $5<\sqrt{n}<6$ を成り立たせる整数 n の値は何個ありますか。

③ $\sqrt{200}$ の整数部分を求めなさい。

④ $\sqrt{50}$ の小数部分を求めなさい。

⑤ $\sqrt{7}$ の小数部分を a とするとき $(a+1)(a+3)$ の値を求めなさい。

⑥ $\sqrt{6}$ の整数部分を a 、小数部分を b とするとき、a^2-b^2 の値を求めなさい。

平方根の応用

式の値〔1〕

〔例題〕 $x-y=2\sqrt{3}$ のとき、$x^2-2xy+y^2$ の値を求めなさい。

（解法） $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$ と変形してから代入する $(x-y)^2=(2\sqrt{3})^2=12$

【1】次の式の値を求めなさい。

① $x=\sqrt{5}+3$ のとき、x^2-6x+9 の値を求めなさい。

② $x=\sqrt{7}-2$ のとき、x^2+4x+4 の値を求めなさい。

③ $x=\sqrt{10}-4$ のとき、$x^2+11x+28$ の値を求めなさい。

【2】次の式の値を求めなさい。

① $x+y=2\sqrt{3}$ のとき、$x^2+2xy+y^2$ の値を求めなさい。

② $x-y=2\sqrt{5}$ のとき、$x^2-2xy+y^2$ の値を求めなさい。

③ $x+y=\sqrt{7}+2$ 、$x-y=\sqrt{7}-2$ のとき、x^2-y^2 の値を求めなさい。

平方根の応用

式の値〔2〕

〔例題〕 $x+y=\sqrt{7}$ 、$xy=1$ のとき、x^2+xy+y^2 の値を求めなさい。

（解）$x^2+xy+y^2=x^2+2xy+y^2-xy=(x+y)^2-xy$ と変形して

$=(\sqrt{7})^2-1=6$ と求めます。

$x+y=\boxed{}$、$xy=\triangle$ が与えられている場合は $(x+y)^2$ に、
$x-y=\boxed{}$、$xy=\triangle$ が与えられている場合は $(x-y)^2$ の形に変形します。

【3】次の式の値を求めなさい。

① $x+y=\sqrt{5}$ 、$xy=2$ のとき、x^2+y^2 の値を求めなさい。

② $x+y=\sqrt{3}$ 、$xy=-1$ のとき、x^2+xy+y^2 の値を求めなさい。

③ $x-y=\sqrt{2}$ 、$xy=-3$ のとき、x^2+y^2 の値を求めなさい。

④ $x+y=2\sqrt{3}$ 、$xy=-2$ のとき、$(x-y)^2$ の値を求めなさい。

平方根の応用

【4】次の式の値を求めなさい。

① $x+y=2\sqrt{3}$、$xy=-1$のとき、$(x-y)^2$の値を求めなさい。

② $x+y=\sqrt{5}+\sqrt{2}$、$xy=2\sqrt{3}$のとき、x^2+y^2の値を求めなさい。

③ $x+y=\sqrt{3}+1$、$xy=\sqrt{3}-1$のとき、x^2+xy+y^2の値を求めなさい。

【5】$x=\sqrt{3}+1$、$y=\sqrt{3}-1$のとき、次の式の値を求めなさい。

① $x+y$

② xy

③ x^2+y^2

④ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

平方根の応用

式の値〔3〕

〔例題〕 $x=\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$、$y=\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}$ のとき、x^2+xy+y^2 の値を求めなさい。

複雑そうに見える計算でも、和や差あるいは積が比較的簡単になることが多い

$x^2+xy+y^2=x^2+2xy+y^2-xy=(x+y)^2-xy$ と変形してから代入する

和は $x+y=\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}+\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}=7$

積は $xy=\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{7+\sqrt{5}}{2}=\dfrac{7^2-(\sqrt{5})^2}{4}=11$ となるので $7^2-11=38$

【6】次の式の値を求めなさい。

① $x=\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$、$y=\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}$ のとき、x^2+y^2 の値を求めなさい。

② $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$、$y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ のとき、x^2+xy+y^2 の値を求めなさい。

平方根の応用

【7】次の連立方程式を解きなさい。

① $\begin{cases} \sqrt{5}x - \sqrt{2}y = 1 \\ \sqrt{2}x + \sqrt{5}y = 1 \end{cases}$

② $\begin{cases} x + y = (\sqrt{3}+1)^2 \\ x - y = (\sqrt{3}-1)^2 \end{cases}$

【8】連続した3つの自然数の和の平方根は $\sqrt{1+2+3} = \sqrt{6}$ や $\sqrt{2+3+4} = \sqrt{9} = 3$ のように自然数になる場合と、ならない場合がある。$(2, 3, 4)$ 以外で、自然数になる場合の最小の3つの自然数の組を求めなさい。

【9】連続した3つの奇数の和の平方根には $\sqrt{1+3+5} = \sqrt{9} = 3$ のように自然数になる場合がある。$(1, 3, 5)$ 以外で、自然数になる場合の最小の3つの奇数の組を求めなさい。