文字式の利用

計算のくふう〔乗法公式〕

〔例〕 ① 乗法公式を利用して102^2を計算しなさい。

（解） 乗法公式$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$を利用すると

$$102^2=(100+2)^2=100^2+2\times100\times2+2^2=10000+400+4=10404$$

② 乗法公式を利用して102×98を計算しなさい。

（解） 乗法公式$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$を利用すると

$$102\times98=(100+2)\times(100-2)=100^2-2^2=10000-4=9996$$

【1】乗法公式を利用して、次の計算をしなさい。また、どのようにくふうしたかが分かるように途中の式を書きなさい。

① 103^2

② 41^2

③ 98^2

④ 49^2

⑤ 19.8^2

⑥ 103×97

⑦ 49×51

⑧ 62×58

⑩ 10.1×9.9

⑩ 20.5×19.5

文字式の利用

計算のくふう〔因数分解〕

〔例〕 ① 因数分解の公式を利用して $43\times11+43\times19$ を計算しなさい。

（解） 共通因数でくくる考え方を利用すると

$$43\times11+43\times19=43\times(11+19)=43\times30=1290$$

② 因数分解の公式を利用して 54^2-46^2 を計算しなさい。

（解） 因数分解の公式 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ を利用すると

$$54^2-46^2=(54+46)\times(54-46)=100\times8=800$$

【2】因数分解を利用して、次の計算をしなさい。また、どのようにくふうしたかが分かるように途中の式を書きなさい。

① $85\times18+15\times18$

② $12\times65+88\times65$

③ $24\times78-24\times28$

④ $7.2\times2.8+2.8^2$

⑤ $7.5^2-2.5^2$

⑥ 82^2-18^2

⑦ 2001^2-1999^2

⑧ $9.6^2-0.4^2$

⑨ $3.14\times55^2-3.14\times45^2$

⑩ $108^2-2\times108\times104+104^2$

文字式の利用

式の値

〔例〕 $x=\dfrac{1}{3}$, $y=-2$ のとき $(x+4y)^2-(x-8y)(x-2y)$ の値を求めなさい。

（解） 式を展開し整理すると

$$(x+4y)^2-(x-8y)(x-2y)$$
$$=(x^2+8xy+16y^2)-(x^2-10xy+16y^2)$$
$$=x^2+8xy+16y^2-x^2+10xy-16y^2=18xy$$

この式に $x=\dfrac{1}{3}$, $y=-2$ を代入すると $18xy=18\times\dfrac{1}{3}\times(-2)=-12$

【3】 $a=2$, $b=-3$ **のとき、次の式の値を求めなさい。**

① $(9a^2b-3ab^2)\div 3ab$ の値

② $a(a-2b)+2b(a-2b)$ の値

【4】次の式の値を求めなさい。

① $x=3$, $y=1$ のとき $(x+4y)(x+9y)-(x+6y)^2$ の値

② $x=76$, $y=8$ のとき $x^2-4xy+4y^2$ の値

③ $a=6.6$, $b=3.4$ のとき a^2-b^2 の値

④ $x+y=9$, $x-y=-4$ のとき x^2-y^2 の値

文字式の利用

式の値〔発展〕

〔例〕 $x+y=6$, $xy=3$ のとき x^2+y^2 の値を求めなさい。

（解） $x^2+y^2=x^2+2xy+y^2-2xy=(x+y)^2-2xy$
と変形してから値を代入する
$(x+y)^2-2xy=6^2-2\times3=36-6=30$

$x+y=$□，$xy=$△と与えられているとき、$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ を利用する
$x-y=$□，$xy=$△と与えられているとき、$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$ を利用する

【5】 $x+y=-3$，$xy=2$ **のとき、次の式の値を求めなさい。**

① x^2+y^2

② $x^2+3xy+y^2$

③ x^2+xy+y^2

④ x^2-xy+y^2

【6】 $x-y=3$，$xy=-5$ **のとき、次の式の値を求めなさい。**

① x^2+y^2

② x^2+xy+y^2

文字式の利用

整数に関する証明

〔例〕連続する2つの整数がある。大きい方の整数の平方から2つの整数の和をひいた数は、小さい方の整数の平方であることを証明しなさい。

（証明）小さいほうの整数をnとすると、

連続する2つの整数は　n，________　と表される。

題意より、大きい方の整数の平方から2つの整数の和をひいた数は

$(\qquad)^2-(\qquad+\qquad)=$ __________

よって________________________である。

【1】連続する3つの整数では、それぞれの整数の平方の和から5をひいた数は、最大の整数と最小の整数の積の3倍に等しくなることを証明しなさい。

（証明）3つの整数を　n，_________，_________とすると

題意より ___________________________＝

＝

＝3____(__________)　よって題意を満たす。

【2】連続する3つの整数で、最小の数の平方と最大の数の平方の和から、中央の数の平方の2倍を引くと、その差は2になることを証明しなさい。

（証明）3つの整数を _________，n，_________とすると

【3】連続する3つの整数で、最大の数の2乗から、最小の数の2乗を引くと、中央の数の4倍になることを証明しなさい。

文字式の利用

【4】連続する3つの整数では、最大の整数と最小の整数の積に1を加えると、中央の整数の平方に等しくなることを証明しなさい。

【5】連続する3つの整数のはじめの2数の積に中央の数の2倍を加えると、中央の数と最大の数の積に等しくなることを証明しなさい。

【6】連続する3つの整数で、最小の数の2乗と、最大の数の2乗の和から、中央の数の2乗を引いた差は、中央の数の2乗より 2 大きいことを証明しなさい。

【7】連続する4つの整数で、最大の数の2乗から、最小の数の2乗を引いた差は、その間にある2つの数の和の 3 倍になります。このことを証明しなさい。

（証明） 4つの整数を n，＿＿＿＿＿，＿＿＿＿＿，＿＿＿＿＿とすると

文字式の利用

奇数・偶数に関する証明

〔例〕 連続する2つの偶数の積に1を加えた数は、その2つの偶数の間にある奇数の平方となることを証明しなさい。

〔証明〕2つの偶数を__________、__________とする(ただし、n は整数とする)

また、その間にある奇数は__________と表される。

題意より ________________ ＝________________________

＝________________

よって、連続する2つの偶数の積に1を加えた数は、その2つの偶数の間にある奇数の平方である。

【1】 奇数の平方から1をひいた数は、4の倍数であることを下のように証明した。空白に式や数を書き入れ証明を完成しなさい。

(証明) n を整数とすると、奇数は __________ と表される。

題意より$(\qquad\qquad)^2-1=$ ______________ $=4n^2+4n$

$=4(\qquad\qquad)$

ここで n^2+n は整数だから __________ は4の倍数である。

【2】 連続する2つの偶数の平方の差は、2つの偶数の間にある奇数の4倍であることを下のように証明した。空白に式や数を書き入れ証明を完成しなさい。

(証明) n を整数とすると、2 つの偶数は __________ ,__________と表される。

また、2 つの偶数の間にある奇数は__________と表される。

題意より________________＝ ______________ ＝______________

$=4(\qquad\qquad)$ よって題意を満たす。

【3】 連続する3つの偶数では、最大の偶数の平方から最小の偶数の平方を引くと、中央の偶数8 倍になることを証明しなさい。

文字式の利用

【4】連続する2つの奇数の平方の差は 8 の倍数であることを証明しなさい。

【5】連続する3つの奇数では、最小の奇数と最大の奇数の積に 4 を加えると、中央の奇数の平方になることを証明しなさい。

【6】4 の倍数より1小さい整数の平方は、8 の倍数より1大きい。これを証明しなさい。

〔証明〕 4 の倍数を＿＿＿＿＿＿とする。（ただし、n は整数）

題意より $(\qquad\qquad)^2 =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$=$

ここで＿＿＿＿＿＿＿は整数だから4 の倍数より1小さい整数の平方は、

8 の倍数より1大きい。

【7】62×68 のように、十の位の数が等しく、一の位の数の和が 10 である 2 けたの整数の積は、十の位の数とその数より 1 大きい数の積 $6\times(6+1)=42$ を千の位と百の位に、一の位の数の積 $2\times 8=16$ を十の位と一の位にして $62\times 68=4216$ と簡単に計算できる。このことを次のように証明した。証明を完成させなさい。

（証明）十の位を a 、一の位を $b,\ c$ とすると、2つの整数の積は

$(10a+b)(10a+c)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$=100a^2+10a(\qquad\qquad)+bc$ …ここで $b+c=10$ を代入すると

$=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿と証明できる。

文字式の利用

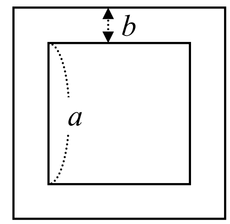
図形への利用

〔例〕 1辺 a m の正方形の花壇の外側に幅 b m の道をつけるとき、道の部分の面積をを求めなさい。

（解） 道を含めた全体の面積から花壇の面積を引く。

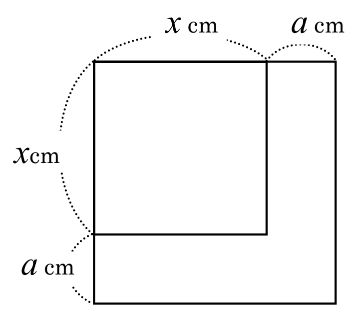
$$(a+2b)^2-a^2=(a^2+4ab+4b^2)-a^2$$
$$=a^2+4ab+4b^2-a^2=4ab+4b^2$$

答 $4ab+4b^2$ m²

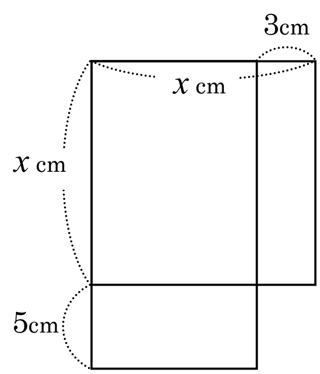


【1】次の問に答えなさい。

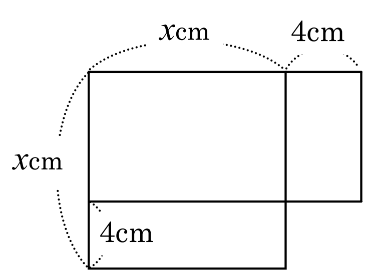
① 1辺の長さが x cm の正方形があります。この正方形の1辺を a cm 長くして正方形をつくります。このとき、新しくできた正方形の面積はもとの正方形に比べてどれだけ増加しましたか。



② 1辺の長さが x cm の正方形を、図のように縦を5 cm 長くし、横を3 cm 短くして長方形をつくります。このとき、長方形の面積はもとの正方形に比べてどれだけ増加しましたか。

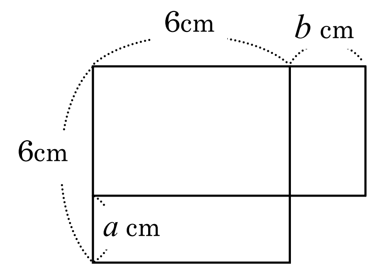


③ 1辺の長さが x cm の正方形を、図のように横を4 cm 長く、縦を4 cm 短くして長方形をつくります。このとき、長方形の面積はもとの正方形に比べてどれだけ減少しましたか。

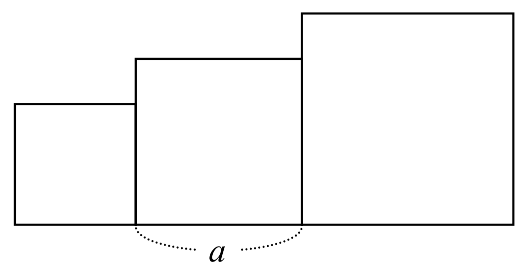


文字式の利用

【2】１辺の長さが 6 cm の正方形の縦を a cm 短くし、横を b cm 長くして長方形を作るとき、長方形の面積は、もとの正方形よりどれだけ大きくなりますか。



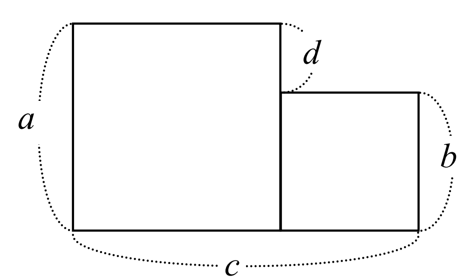
【3】右の図のような１辺の長さが 4 cm ずつちがう３つの正方形があります。中央の正方形の１ 辺の長さを a cm とするとき、最も大きい正方形と最も小さい正方形の面積の差を a を用いた式で表しなさい。



【4】次の問に答えなさい。

① 縦が a cm、横が b cm の長方形がある。この縦を 8 cm 長く、横を 2 cm 短くして長方形を作ったら、もとの長方形の面積と等しくなった。このとき a を、b の式で表しなさい。

② 右の図のように、1辺の長さが a 、b の大小2つの正方形が並べてあります。この正方形の面積の差は c 、d の積に等しいことを証明しなさい。



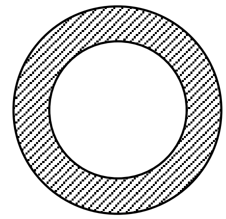
文字式の利用

〔例〕　半径 a m の円形の花壇の外側に幅 b m の道をつけるとき、道の部分の面積をを求めなさい。

（解）道を含めた全体の面積から花壇の面積を引く。

$$\pi(a+b)^2-\pi a^2=\pi(a^2+2ab+b^2)-\pi a^2$$
$$=\pi a^2+2\pi ab+\pi b^2-\pi a^2=2\pi ab+\pi b^2$$

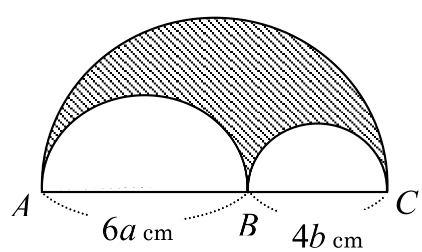
答　$2\pi ab+\pi b^2$ m²



【5】半径 r cm の円がある。この円の半径を a cm 長くするとき、次の問に答えなさい。

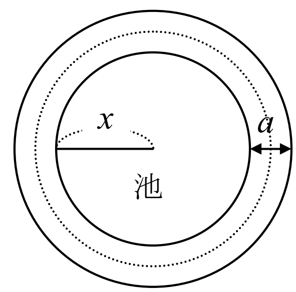
①　円周は何 cm 増えますか。　　②　面積は何 cm² 増えますか。

【6】右の図のように AB , AC , BC をそれぞれ直径とする半円がある。$AB=6a$ cm、$BC=4b$ cm のとき、斜線部の面積を求めなさい。



中心線の長さと面積

〔例〕　半径が x m の円形の池の周囲に幅 a m の道を作りました。道の中央を通る点線で表された円周の長さを l とするとき、次の問に答えなさい。

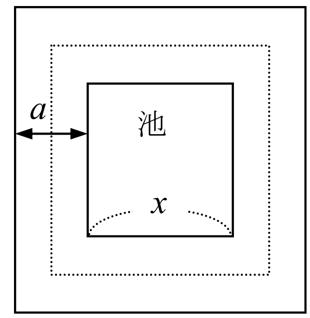


①　長さ l を a と x の式で表しなさい。

②　道の面積 S は $S=al$ として求められることを証明しなさい。

文字式の利用

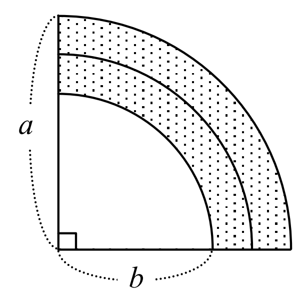
【7】1辺の長さが x m の正方形の池の周囲に幅 a m の道を作りました。道の中央を通る線の長さを ℓ とするとき、次の問に答えなさい。



① 長さ ℓ を a と x の式で表しなさい。

② 道の面積 S は $S=a\ell$ として求められることを証明しなさい。

【8】右の図のような中心角が 90°で、半径 a cm の扇形と半径 b cm の扇形が重なっている。影をつけた部分の面積を S cm²、その中央を通る線の長さを ℓ cm とするとき、$S=\ell(a-b)$ であることを証明しなさい。



【9】円形の池の周囲に幅 a m の道を作りました。道の中央を通る点線で表された円の半径が r m とするとき、道の面積を a と r の式で表しなさい。