因数分解

共通因数でくくる

文字式$3ab$に含まれるa，$3a$，ab…などを＿＿＿＿＿といいます。

多項式の各項に共通な因数があるとき、分配法則 $\boxed{ab+ac=a(b+c)}$ を用いて共通因数でくくり、単項式や多項式の積の形に直すことを「＿＿＿＿＿する」といいます。

〔例1〕 $ax+bx-x$ を因数分解しなさい。

（解）すべての項に因数xが含まれているので

$$ax+bx-x=x(a-b-1)$$

〔例2〕 $3a^2-6ab+9a$ を因数分解しなさい。

（解）すべての項に因数$3a$が含まれているので

$$\begin{aligned}3a^2-6ab+9a&=3a\times a-3a\times 2b+3a\times 3\\&=3a(a-2b+3)\end{aligned}$$

【1】次の因数分解をしなさい。

① $ax-ay$

② $xy-x$

③ a^2b+ab^2

④ $3a^2-6ax$

⑤ x^3-x^2

⑥ $10x^2-15xy+5x$

⑦ $5a^2-10ab-15a$

⑧ $x^3y+3x^2y^2-x^2y$

⑨ $6a^2-3ab+12a$

⑩ $4a^2b-6ab^2+8ab$

因数分解

乗法公式を用いて因数分解する

（例） 公式 $\boxed{x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)}$ を利用して $x^2+7x+12$ を因数分解しなさい。

(1) まず定数項の $+12$ に着目すると $(x+a)(x+b)$ と因数分解したときの a , b の積が 12 であること。符号が同符号どうしであることがわかります。

(2) 次に $+7x$ に着目すると a , b の絶対値の和が 7 であること、a , b が正であることがわかります。したがって $12=1\times12$ 、$12=2\times6$ 、$12=3\times4$ のうち $12=3\times4$ を用いて因数分解できることがわかります。

〔解〕 $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$

【2】公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ を用いて、次の因数分解をしなさい。

① $x^2+8x+12$

② $a^2-7a+12$

③ $a^2+9a+18$

④ $x^2-11x+24$

⑤ $x^2+9x+14$

⑥ $x^2-16x+15$

⑦ $x^2+8xy+15y^2$

⑧ $x^2-11xy+18y^2$

⑨ $x^2+12xy+20y^2$

⑩ $a^2-7ab+6b^2$

⑪ $a^2+8ab+15b^2$

⑫ $x^2-10xy+24y^2$

因数分解

乗法公式を用いて因数分解する

（例） 公式 $\boxed{x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)}$ を利用して $x^2-4x-12$ を因数分解しなさい。

(1) まず定数項の -12 に着目すると $(x+a)(x+b)$ と因数分解したときの a , b の積が -12 であることから、符号が異符号どうしであることがわかります。

(2) 次に $-4x$ に着目すると a , b の絶対値の差が 4 であること、絶対値の大きいほうが負であることがわかります。したがって $-12=1\times(-12)$ 、$-12=2\times(-6)$ 、$-12=3\times(-4)$ のうち $-12=2\times(-6)$ を用いて因数分解できることがわかります。

〔解〕 $x^2-4x-12=(x+2)(x-6)$

【3】公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ を用いて、次の因数分解をしなさい。

① $x^2+2x-15$　　② $a^2-4a-21$

③ $x^2+3x-18$　　④ $x^2-2x-24$

⑤ x^2+x-2　　⑥ x^2-x-20

⑦ $x^2+xy-12y^2$　　⑧ $a^2-ab-30b^2$

⑨ $a^2+3ab-10b^2$　　⑩ $x^2-2xy-35y^2$

⑪ $x^2+xy-30y^2$　　⑫ $a^2-3ab-18b^2$

因数分解

与えられた式が和や差の平方の形であるとき、公式$\boxed{x^2+2xy+y^2=(x+y)^2}$または$\boxed{x^2-2xy+y^2=(x-y)^2}$を用いて因数分解します。

例　$9x^2-12xy+4y^2=(3x)^2-2\times(3x)\times(2y)+(2y)^2=(3x-2y)^2$

【4】公式　$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ を用いて、次の因数分解をしなさい。

① x^2+2x+1　　② $a^2+10a+25$

③ $x^2+12xy+36y^2$　　④ $4x^2+4x+1$

⑤ $4x^2+12x+9$　　⑥ $9x^2+30x+25$

⑦ $25a^2+10ab+b^2$　　⑧ $16x^2+40xy+25y^2$

【5】公式　$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$ を用いて、次の因数分解をしなさい。

① x^2-2x+1　　② $a^2-14a+49$

③ $a^2-6ab+9b^2$　　④ $m^2n^2-2mn+1$

⑤ $9x^2-12x+4$　　⑥ $49x^2-14x+1$

⑦ $9a^2-30ab+25b^2$　　⑧ $16x^2-40xy+25y^2$

因数分解

平方の差の因数分解

与えられた式が平方の差の形であるとき、公式 $\boxed{x^2-y^2=(x+y)(x-y)}$ を用いて因数分解します。

〔例〕 $9x^2-16=(3x+4)(3x-4)$

【6】公式 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ を用いて、次の因数分解をしなさい。

① x^2-1

② x^2-9

③ a^2-4

④ a^2-25

⑤ a^2-b^2

⑥ x^2-9y^2

⑦ x^2-4y^2

⑧ m^2-36n^2

【7】公式 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ を用いて、次の因数分解をしなさい。

① $4x^2-1$

② $9a^2-4$

③ $16x^2-25$

④ $25a^2-9$

⑤ $4a^2-9b^2$

⑥ $25x^2-16y^2$

⑦ $x^2-\dfrac{1}{4}y^2$

⑧ $a^2-\dfrac{1}{9}b^2$

⑨ $\dfrac{1}{4}a^2-\dfrac{1}{25}b^2$

⑩ $\dfrac{4}{9}x^2-y^2$

因数分解

【8】次の因数分解をしなさい。

① $10x^2-5xy$　② $2a^2b-4ab^2+6ab$

③ $x^2+8x+12$　④ $x^2-10x+9$

⑤ x^2-6x+8　⑥ $x^2-2x-24$

⑦ $a^2-4a-12$　⑧ $x^2-6x-16$

⑨ $x^2+8xy+15y^2$　⑩ $x^2+3xy-18y^2$

⑪ x^2+2x+1　⑫ $4x^2+12x+9$

⑬ $a^2-10ab+25b^2$　⑭ $9x^2+12x+4$

⑮ $25x^2-20xy+4y^2$　⑯ $9x^2-24xy+16y^2$

⑰ x^2-4　⑱ x^2-9y^2

⑲ $9a^2-16b^2$　⑳ $4x^2-25y^2$

【9】次の問に答えなさい。

① $x^2+ax+24$ が因数分解できるような正の整数 a の値は何通りありますか。

② $x^2+px-63$ が因数分解できるような正の整数 p の値をすべて求めなさい。

因数分解

各種の因数分解

因数分解では、すべての項に共通な因数があれば、まず、はじめに共通因数でくくり、その後、乗法公式を利用してさらに因数分解できるかどうかを考えます。

〔例〕 ① $3x^2-6x-45$

（解） $=3(x^2-2x-15)$

$=3(x-5)(x+3)$

② $ax^2-6axy+9ay^2$

（解） $=a(x^2-6xy+9y^2)$

$=a(x-3y)^2$

【1】次の因数分解をしなさい。

① $2x^2-18$

② $2x^2-16x+32$

③ $5x^2-20x+20$

④ $2x^2+16x+24$

⑤ $2x^2+6x+4$

⑥ x^3+2x^2+x

⑦ $4x^2-8xy+4y^2$

⑧ x^2y-16y

⑨ $mx^2-3mx-4m$

⑩ x^3y-2x^2y+xy

因数分解

【2】次の因数分解をしなさい。

① $x^2+8x+15$

② $x^2-13x+12$

③ x^2-8x-9

④ $a^2-ab-12b^2$

⑤ x^2-4y^2

⑥ $25x^2-36y^2$

⑦ $a^2-12ab+36b^2$

⑧ $4a^2-12ab+9b^2$

⑨ $2x^2-4x-16$

⑩ $3a^2+12a+9$

⑪ $8a^2-8ab+2b^2$

⑫ $3x^2-30xy+75y^2$

⑬ $2xy^2-2x$

⑭ x^3+2x^2-3x

⑮ $ax^2-6ax-16a$

⑯ $3x^2y-3xy-6y$

因数分解

因数分解のくふう

共通因数が多項式であれば、その共通因数を他の文字に置き換え、簡単な形にしてから因数分解し、置き換えた部分をもとの多項式にもどします。

〔例〕　$a(x+y)-b(x+y)$ を因数分解しなさい。
（解）　$x+y=M$ とすると　　与式$=aM-bM=(a-b)M=(a-b)(x+y)$

【1】次の因数分解をしなさい。

① $a(x-2)-3(x-2)$　　② $x(y+1)-(y+1)$

③ $a(x-y)+2b(x-y)$　　④ $(x+y)^2-(x+y)$

因数分解のくふう〔発展〕

共通な部分がないように見える多項式でも、一部の項だけに共通な因数でくくると、共通因数が生まれることがあります。

〔例〕　$ac-ad+bc-bd$ を因数分解しなさい。

（解）　a を含む項と、b を含む項に分け、それぞれを a と b でくくります。
与式$=a(c-d)+b(c-d)$　次に、$c-d=M$ と置き換えて M でくくる。
$=a(c-d)+b(c-d)=aM+bM$
$=(a+b)M=(a+b)(c-d)$

【2】次の因数分解をしなさい。

① $xy-x+y-1$　　② $ac+ad-bc-bd$

③ $ax+bx+ay+by$　　④ $a^2-ac+ab-bc$

因数分解

因数分解のくふう

共通因数の多項式を他の文字に置き換え、簡単な形にしてから公式を利用して因数分解し、置き換えた部分をもとの多項式にもどします。それぞれの(　　)の中に同類項があれば簡単にしておきましょう。

〔例〕 $(a+b)^2-2(a+b)-24$ 　　　　$a+b=M$ とすると

（解）　与式$=M^2-2M-24=(M-6)(M+4)=(a+b-6)(a+b+4)$

【3】次の因数分解をしなさい。

① $(a+b)^2+5(a+b)+4$

② $(a+7)^2-8(a+7)+15$

③ $(x-y)^2-6(x-y)+9$

④ $(a+b)^2-25$

⑤ $(2a+b)^2-c^2$

⑥ $(2x+3)^2-(x-1)^2$

⑦ $a^2+2ab+b^2-1$

⑧ $x^2-4xy+4y^2-25$

※⑨ x^4-y^4

※⑩ x^4+x^2+1