特別な平行四辺形

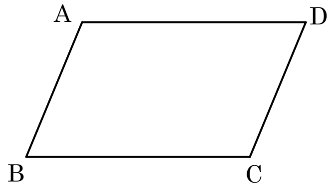
長方形・ひし形・正方形の定義

長方形　〔定義〕　＿＿＿＿＿＿がすべて直角である四角形。

ひし形　〔定義〕　＿＿＿＿＿＿がすべて等しい四角形。

正方形　〔定義〕　＿＿＿＿＿＿がすべて直角で、＿＿＿＿＿＿がすべて等しい四角形。

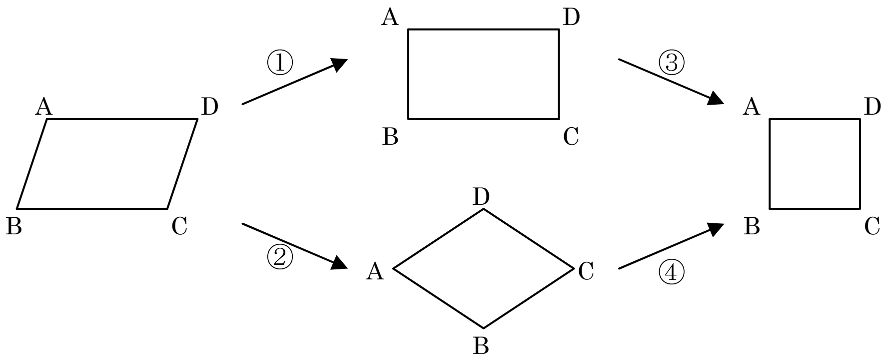
【1】右の平行四辺形 ABCD が、次の条件を持つと、どんな四角形になりますか。



(1)　$\angle A = \angle B$　　　(2) $AB = BC$

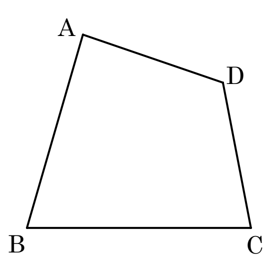
(3) $AC = BD$　　　(4) $AC = BD$、$AC \perp BD$

【2】▱ABCD が、長方形、ひし形、正方形になるためには、それぞれどんな条件を加えればよいですか。下の図の①～④の矢印にあてはまる条件をア～エからすべて選びなさい。



ア　$\angle B = 90°$　　イ　$AB = AD$　　ウ　$AC \perp BD$　　エ　$AC = BD$

【3】四角形 ABCD が、次の条件を持つと、どんな四角形になりますか。



(1) $AB = BC = CD$、$AB \parallel DC$

(2)　対角線の交点を O とするとき $AO = BO = CO = DO$

(3)　$\angle A = \angle B = \angle C = 90°$

(4)　$\angle A = \angle B = \angle C = 90°$　、$AB = BC$

特別な平行四辺形

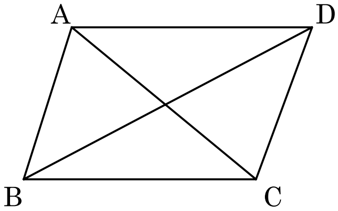
長方形に関する証明

〔定義〕 ________________がすべて直角である四角形。

平行四辺形＋となり合う_____が等しい→_________がすべて等しい→長方形

〔定理〕 長方形の対角線は________________。

【例題】右の平行四辺形ABCDで、対角線ACとBDの長さが等しければ、平行四辺形 ABCD は長方形であることを証明しなさい。



〔証明〕

△ABCと△DCBにおいて、______は共通……①

仮定より_______＝________……②

平行四辺形の対辺は等しいので_______＝________……③

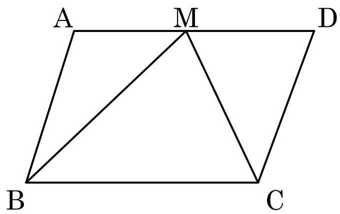
①、②、③より________________________________から

△ABC≡△DCB、よって∠ABC＝∠DCB

また、平行四辺形の対角は等しいから ∠ABC＝∠ADC、∠DCB＝∠BAD

であり、すべての角が等しいので平行四辺形 ABCD は長方形である。

【1】右の平行四辺形ABCDの辺ADの中点をMとするとき、∠MBC＝∠MCB ならば平行四辺形ABCD は長方形であることを証明しなさい。



〔証明〕△ABMと△DCMにおいて

仮定よりAM＝________……①

∠________＝∠________より BM＝________……②

平行四辺形の対辺は等しいのでAB＝_______……③

①、②、③より_____________________がそれぞれ等しいので、

△__________≡△__________

合同な図形において対応する角は等しいので∠BAM＝∠___________

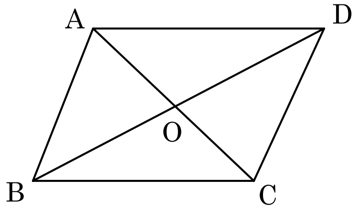
また、平行四辺形の2組の対角はそれぞれ等しいから

∠__________＝∠___________＝∠__________＝∠___________

4つの角がすべて等しいので平行四辺形 ABCD は長方形である。

特別な平行四辺形

【2】右の平行四辺形 ABCD で、∠DAC＝∠DBC であれば、平行四辺形 ABCD は長方形であることを証明しなさい。



〔証明〕△AOD と△COB において

仮定より∠DAO＝∠________

AD∥BC なので∠DAO＝∠________(錯角)、∠DAO＝∠________(錯角)

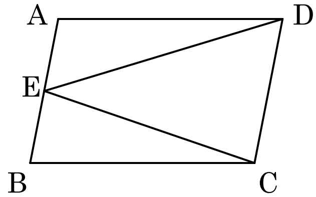
また、AD＝BC

よって△AOD と△COB はともに合同な二等辺三角形である。

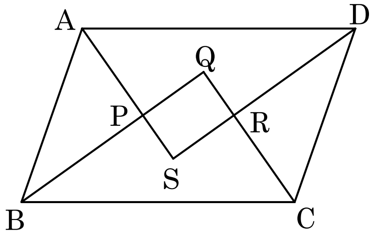
従って、AC＝________

対角線の長さが等しいので平行四辺形 ABCD は長方形である。

【3】 右の平行四辺形 ABCD で、AB の中点を E とする。EC＝ED ならば平行四辺形 ABCD は長方形であることを証明しなさい。



【4】右の平行四辺形 ABCD の 4 つの角の二等分線の交点をそれぞれ P、Q、R、S とするとき、四角形 PQRS は長方形となることを証明しなさい。



〔証明〕

特別な平行四辺形

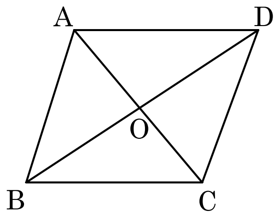
ひし形に関する証明

〔定義〕　＿＿＿＿＿＿＿＿がすべて等しい四角形。

平行四辺形＋となり合う＿＿＿が等しい→＿＿＿＿がすべて等しい→ひし形

〔定理〕　ひし形の対角線は＿＿＿＿＿＿＿＿。

【例題】ひし形 ABCD の対角線 AC と BD は垂直に交わることを証明しなさい。



〔証明〕

△ABO と△ADO において、＿＿＿は共通……①

ひし形の 4 つの辺は等しいので＿＿＿＝＿＿＿……②

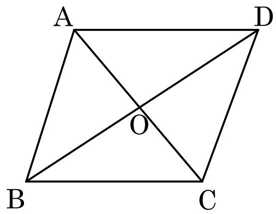
ひし形は、平行四辺形でもあり対角線は中点で交わるので＿＿＿＝＿＿＿……③

①、②、③より＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿から△ABO≡△ADO

よって∠AOB＝∠AOD

また、∠AOB+∠AOD＝180°　だから　∠AOB＝∠AOD＝90°

【1】右の平行四辺形 ABCD で、対角線 AC と BD が垂直であれば、平行四辺形 ABCD はひし形であることを証明しなさい。



〔証明〕△ABO と△BCO において

仮定より∠＿＿＿＿＝∠＿＿＿＿＝90°……①

また、平行四辺形の対角線は中点で交わるので AO＝＿＿＿＿……②

＿＿＿＿＝＿＿＿＿(共通)……③

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿がそれぞれ等しいので、

△＿＿＿＿≡△＿＿＿＿

対応する辺は等しいので＿＿＿＿＝＿＿＿＿

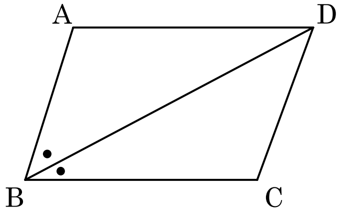
平行四辺形の2組の対辺はそれぞれ等しいので

＿＿＿＿＝＿＿＿＿＝＿＿＿＿＝＿＿＿＿

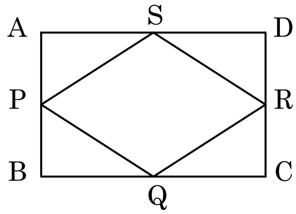
4つの辺がすべて等しいので平行四辺形 ABCD はひし形である。

特別な平行四辺形

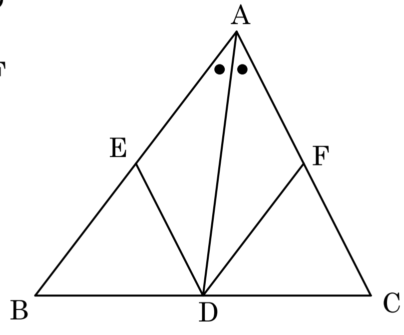
【2】右の平行四辺形 ABCD で、対角線 BD が∠ABC の二等分線であれば、平行四辺形 ABCD はひし形であることを証明しなさい。



【3】右の図のように、長方形 ABCD の各辺の中点を、それぞれ P、Q、R、S とするとき、四角形 PQRS はひし形であることを証明しなさい。



【4】右の図のように△ABC の∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とする。D から AB、AC に平行な線を引き、辺 AB、AC との交点を E、F とするとき、四角形 AEDF はひし形であることを証明しなさい。



特別な平行四辺形

正方形に関する証明

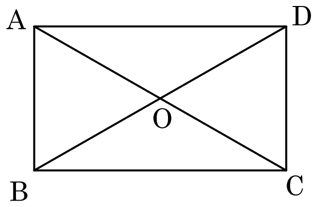
〔定義〕 ＿＿＿＿＿＿＿＿がすべて直角で、＿＿＿＿＿＿がすべて等しい四角形。

長方形＋となり合う＿＿＿が等しい四角形→正方形

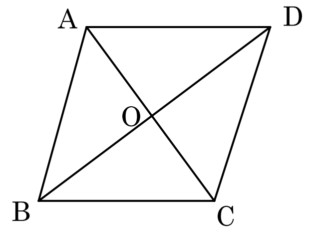
ひし形＋となり合う＿＿＿が等しい四角形→正方形

〔定理〕 正方形の対角線は＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

【1】 長方形 ABCD で AC⊥BD ならば、四角形 ABCD は正方形であることを証明しなさい。



【2】 ひし形 ABCD で AC＝BD ならば、四角形 ABCD は正方形であることを証明しなさい。



【3】 右の図のように直角三角形 ABC の∠C の二等分線と辺 AB の交点を D とする。D から BC、AC に垂線を下ろし、辺 BC、AC との交点を E、F とするとき、四角形 DECF は正方形となることを証明しなさい。